30. Nagy László Fizikaverseny
Szalézi Szent Ferenc Gimnázium, Kazincbarcika
2015. február 26 – 27.

J a v í t ó k u l c s

11. osztály

4. feladat

1 nap időtartamát a bolygó tengely körüli forgásának T periódusideje adja, tehát ezt kell kiszámolnunk a megadott adatokból. 1 pont

Ha a gömb alakú bolygó tömege M, és a felszínére helyezünk egy m tömeget, akkor a közöttük ébredő tömegvonzási (gravitációs) erő $F_g = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}$, ahol R a bolygó sugara, és γ gravitációs állandó. 2 pont

A test G súlyát (definíció szerint) az az erő jelenti, amellyel a test a gravitációs mezőben a felfüggesztést húzza, vagy az alátámasztást nyomja. 1 pont

A sarkokon –mivel itt a test „helyben forog”, a bolygó forgástengelyének irányában tulajdonképpen egyensúlyban van–, ezért a sarkokon $G_1 = F_g$ 2 pont

A bolygó egyenlítőjén lévő test viszont úgy tekintendő, hogy R sugarú körpályán T periódusidővel körpályán mozog a gömb alakú bolygó tömegközéppontja körül. A mozgást a gravitációs erő és a mérlegtől származó alátámasztási (vagy felfüggesztési) kényszererő eredője, az F_{cp} centripetális erő biztosítja. 1 pont

Erre a körmozgásra felírva a dinamika alapegyenletét: $F_{cp} = F_g - G_2$ (ahol G_2 a test súlya az egyenlítőn). 1 pont

Ebből $G_2 = F_g - F_{cp} = F_g - m \cdot R \cdot \omega^2$. 2 pont

(Nyilvánvaló, hogy a centripetális gyorsulásnak az ω szögsebességgel kifejezett alakját érdemes használni, mert abban szerepel a keresett T periódusidő.)

A feladat szövege szerint $G_2 = \frac{3}{4} \cdot G_1$ 1 pont

Behelyettesítve: $F_g - m \cdot R \cdot \omega^2 = \frac{3}{4} \cdot F_g$ 1 pont

Átrendezve: $\frac{1}{4} \cdot F_g = m \cdot R \cdot \omega^2$

azaz $\frac{1}{4} \cdot \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot R \cdot \omega^2$ 1 pont

Felhasználva, hogy $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\frac{1}{4} \cdot \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot R \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$ (*) 1 pont

Ebből látható, hogy a test m tömegétől független lesz az eredményünk. 1 pont

Most használjuk fel, hogy egy R sugarú gömb térfogata $V = \frac{4\pi R^3}{3}$, 1 pont

annak M tömege a megadott ρ sűrűséggel kifejezve $M = \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3}$ 1 pont

Ezt behelyettesítve a (*)-gal jelzett egyenletbe, és a lehetséges osztásokat elvégezve

$T^2 = \frac{12 \cdot \pi}{\gamma \cdot \rho}$, azaz $T = \sqrt{\frac{12 \cdot \pi}{\gamma \cdot \rho}}$ 2 pont

amely a megadott sűrűségértékkel és a tömegvonzási együttható $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ értékével számolva: $\boldsymbol{T} = 1{,}1884 \cdot 10^4$ s = **3,3 óra** 1 pont

Összesen: 20 pont