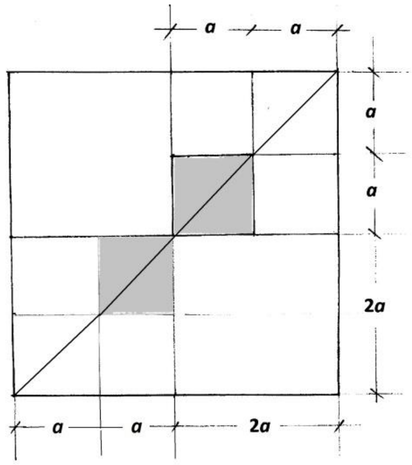
31. Nagy László Fizikaverseny
Szalézi Szent Ferenc Gimnázium, Kazincbarcika
2016. február 25 – 26.

J a v í t ó k u l c s

10. osztály

3. feladat

1. megoldás *(szimmetrikus síkidommá alakítással)*



A csonkolt négyzetet a tömegközéppontjában kell alátámasztani, hogy egyensúlyban legyen. 1 pont

(Ebből a szempontból a lemez vastagsága lényegtelen, ezért ettől eltekinthetünk. Azaz elegendő a felülnézetnek, mint síkidomnak megkeresni a tömegközéppontját.) 1 pont

A hiányos négyzet is tengelyesen szimmetrikus marad, ezért tömegközéppontját a szimmetriatengelyén (a négyzet azon átlóján, melyre a négyzet alakú „lyuk” középpontja is illeszkedik) kell keresni. 2 pont

Gondolatban vágjunk ki a négyzetből még egy a oldalú négyzetet úgy, hogy az így kapott hiányos négyzetnek mindkét átlója szimmetriatengely legyen! (Azaz tükrözzük a hiányzó a oldalú négyzetet az eredeti négyzet középpontjára centrálisan szimmetrikusan, és azt is vágjuk ki gondolatban!) 4 pont

Az így kapott kétszeresen csonkolt négyzet területe: $14a^2$, de tömegközéppontja az eredeti $4a$ oldalú négyzet középpontjában marad. 1 pont

Most helyezzük vissza az utóbb kivágott a oldalú (a^2 területű) négyzetet az eredeti helyére! 3 pont

Ennek tömegközéppontja $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ távolságra van az előbb említett tömegközépponttól. 1 pont

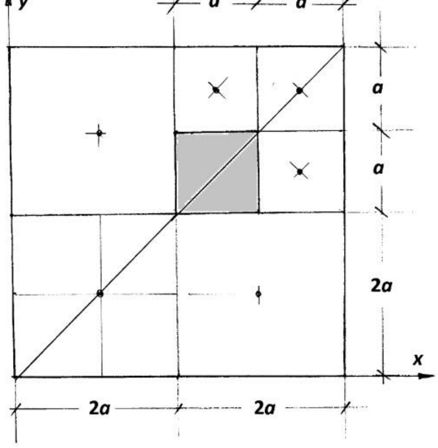
Most osszuk fel ezt az $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ távolságot a „tömegekkel” fordított arányban, ahol x a keresett távolság! 3 pont

$$\frac{14a^2}{a^2} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - x}{x} \quad \Rightarrow \quad 14 \cdot x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - x \quad \Rightarrow \quad 15 \cdot x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{30} \approx 0{,}047 \cdot a$$ 3 pont

<u>Tehát a hiányos négyzet tömegközéppontja $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{30}$ távolságra tolódik el a teljes négyzet középpontjától.</u> 1 pont

Összesen: 20 pont

2. megoldás (*forgatónyomatékokkal)*



Tekintettel arra, hogy a lemez tömegeloszlása egyenletes, így a tömegközéppontja és a súlypontja egybeesik. 1 pont

Szimmetria okokból a súlypontot a $4a$ oldalú négyzet berajzolt átlóján kell keresnünk, amely ezen az átlón x távolságra tolódik el a teljes négyzet középpontjától a kivágott résszel ellentétes irányban. 3 pont

A teljes négyzet súlya $16a^2$-tel arányos, 2 pont

a kivágott négyzet súlya a^2-tel arányos. 1 pont

Most fel kell írnunk a súlyponton átmenő tengelyre vonatkoztatott forgatónyomatékokat! 1 pont

Ekkor a teljes négyzet súlyerejének erőkarja: x ; a kivágott négyzeté pedig: $x + \frac{a\sqrt{2}}{2}$. 1 + 2 pont

Az egyensúly miatt a forgatónyomatékok algebrai összege zérus. 1 pont

<u>A hiányzó négyzet súlyerejének forgatónyomatékát negatív előjelűnek kell vennünk</u>! 3 pont

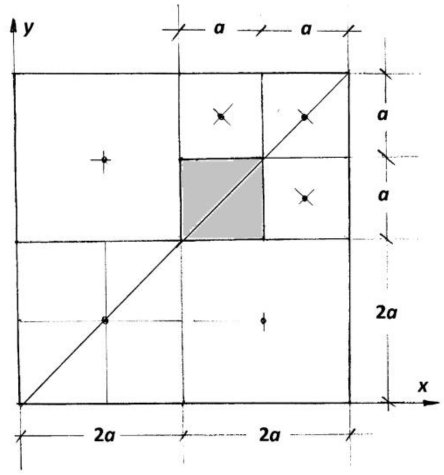
$16a^2 \cdot x - a^2 \cdot \left(x + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 16 \cdot x = x + \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad 32 \cdot x = 2 \cdot x + a \cdot \sqrt{2}$ 3 x 1 pont

Ebből $30 \cdot x = a \cdot \sqrt{2}$, 1 pont

azaz $x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{30} \approx 0{,}047 \cdot a$ 1 pont

Összesen: 20 pont

3. /formális/ **megoldás** *(6 részre darabolással, a függvény-táblázat képleteinek felhasználásával)*



Használjuk fel a –tömegközéppont koordinátáira vonatkozó– a függvénytáblázatban található összefüggéseket, ahol x_{TKP} és y_{TKP} a hiányos négyzet keresett tömegközéppontjának két koordinátája! 1 pont

$x_{TKP} = \frac{\sum_{i=1}^{6} m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{6} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{6} A_i \cdot x_i}{6}$ és

$y_{TKP} = \frac{\sum_{i=1}^{6} m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{6} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{6} A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^{6} A_i}$ 1 pont

A képletben A_i az m_i tömegű rész alapterülete, és $m_i \sim A_i$, mivel a lemez sűrűsége állandó, és a vastagsága is ugyanakkora. 2 pont

Célszerű az eredeti 4a oldalhosszúságú négyzetet az oldalfelező merőlegesei mentén 4 darabra bontani, majd a négyzet alakú „lyukat” tartalmazó negyed-négyzetet annak oldalfelező merőlegesei mentés újra negyedelni. Ugyanis mind a 6 darabnak ismerjük a tömegét is, és a tömegközéppontjaik koordinátáit is. 2 pont

Helyezzük el a síklemezt az x-y koordinátarendszerben úgy, hogy a lemez bal alsó csúcsa az origóban legyen! (Így elkerülhetünk negatív előjelű koordinátákat.) 1 pont

Behelyettesítés után:

$x_{TKP} = \frac{4a^2 \cdot a + 4a^2 \cdot 3a + 4a^2 \cdot a + a^2 \cdot 2{,}5a + a^2 \cdot 3{,}5a + a^2 \cdot 3{,}5a}{16a^2 - a^2} = \frac{29{,}5a^3}{15a^2} = \frac{259{,}5a}{15} = \frac{59}{30}a$ 3 pont

Tekintettel arra, hogy az y tengely menti ordinátákra az abszcisszákra felírt egyenletekkel teljesen azonos adatok írhatók fel (a koordinátarendszer speciális megválasztása miatt): 4 pont

$y_{TKP} = \frac{59}{30} \cdot a$

A fentiek a „csonkolt” síkidom tömegközéppontjának koordinátái.

Hogy a kérdésre válaszoljunk, meg kell határozni e pontnak a 4a oldalú négyzet középpontjának ettől a ponttól való x távolságát, mint 2 pont távolságát.

Mivel a 4a oldalú négyzet tömegközéppontjának koordinátái: (2a ; 2a),

$x^2 = \left[\left(2a - \frac{59}{30} \cdot a\right)\right]^2 + \left[\left(2a - \frac{59}{30} \cdot a\right)\right]^2 = 2 \cdot \left[\left(2a - \frac{59}{30} \cdot a\right)\right]^2$ 3 pont

A műveletek elvégzése után $x^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{900} = \frac{a^2}{450}$ 2 pont

Így $x = \frac{a}{\sqrt{450}} = \frac{a}{15\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{30} \approx 0{,}047 \cdot a$ 1 pont

<u>Tehát a hiányos négyzet tömegközéppontja $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{30}$ távolságra tolódik el a teljes négyzet középpontjától.</u>

Összesen: 20 pont