

31. Nagy László Fizikaverseny
Szalézi Szent Ferenc Gimnázium, Kazincbarcika
2016. február 25 – 26.

J a v í t ó k u l c s

12. osztály

2. feladat

1. megoldás (szimmetrikus síkidommá alakítással)

A csonkolt négyzetet a tömegközéppontjában kell alátámasztani, hogy egyensúlyban legyen.

(Ebből a szempontból a lemez vastagsága lényegtelen, ezért ettől eltekinthetünk. Azaz elegendő a felületnek, mint síkidomnak megkeresni a tömegközéppontját.)

A hiányos négyzet is tengelyesen szimmetrikus marad, ezért tömegközéppontját a szimmetriatengelyén (a négyzet azon átlóján, melyre a négyzet alakú „lyuk” középpontja is illeszkedik) kell keresni.

Gondolatban vágjunk ki a négyzetből még egy a oldalú négyzetet úgy, hogy az így kapott hiányos négyzetnek mindkét átlója szimmetriatengely legyen! (Azaz tükrözzük a hiányzó a oldalú négyzetet az eredeti négyzet középpontjára centrálisan szimmetrikusan, és azt is vágjuk ki gondolatban!)

Az így kapott kétszeresen csonkolt négyzet területe: $14a^2$, de tömegközéppontja az eredeti $4a$ oldalú négyzet középpontjában marad.

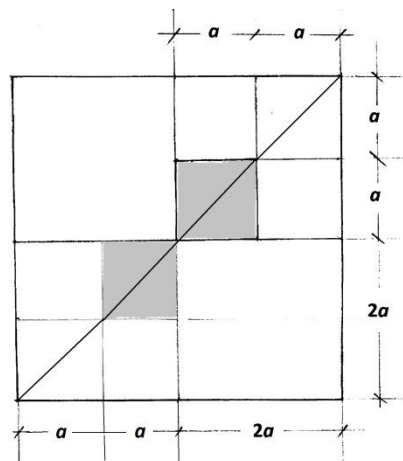
Most helyezzük vissza az utóbb kivágott a oldalú (a^2 területű) négyzetet az eredeti helyére!

Ennek tömegközéppontja $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ távolságra van az előbb említett tömegközépponttól.

Most osszuk fel ezt az $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ távolságot a „tömegekkel” fordított arányban, ahol x a keresett távolság!

$$\frac{14a^2}{a^2} = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - x}{x} \Rightarrow 14 \cdot x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - x \Rightarrow 15 \cdot x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{30} \approx 0,047 \cdot a$$

Tehát a hiányos négyzet tömegközéppontja $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{30}$ távolságra tolódik el a teljes négyzet középpontjától.



1 pont

1 pont

2 pont

4 pont

1 pont

3 pont

1 pont

3 pont

3 pont

1 pont

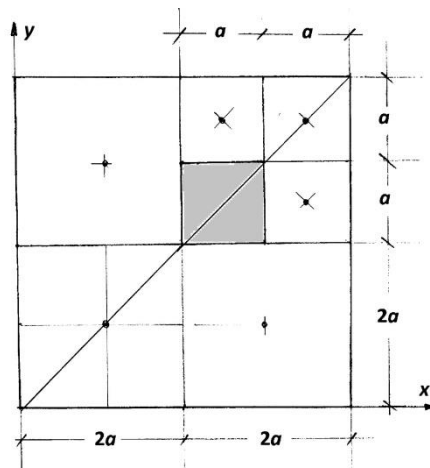
Összesen: 20 pont

2. megoldás (forgatónyomatékokkal)

Tekintettel arra, hogy a lemez tömegeloszlása egyenletes, így a tömegközéppontja és a súlypontja egybeesik.

Szimmetria okokból a súlypontot a $4a$ oldalú négyzet berajzolt átlóján kell keresnünk, amely ezen az átlón x távolságra tolódik el a teljes négyzet középpontjától a kivágott résszel ellentétes irányban.

A teljes négyzet súlya $16a^2$ -tel arányos, a kivágott négyzet súlya a^2 -tel arányos.



1 pont

3 pont

2 pont

1 pont

Most fel kell írunk a súlyponton átmenő tengelyre vonatkoztatott forgatónyomatékokat! 1 pont
 Ekkor a teljes négyzet súlyerejének erőkarja: x ; a kivágott négyzeté pedig: $x + \frac{a\sqrt{2}}{2}$. 1 + 2 pont
 Az egyensúly miatt a forgatónyomatékok algebrai összege zérus. 1 pont

A hiányzó négyzet súlyerejének forgatónyomatékát negatív előjelűnek kell vennünk! 3 pont

$$16a^2 \cdot x - a^2 \cdot \left(x + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \Rightarrow 16 \cdot x = x + \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 32 \cdot x = 2 \cdot x + a \cdot \sqrt{2} \quad 3 \times 1 \text{ pont}$$

Ebből $30 \cdot x = a \cdot \sqrt{2}$, 1 pont

azaz $x = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{30} \approx 0,047 \cdot a$ 1 pont

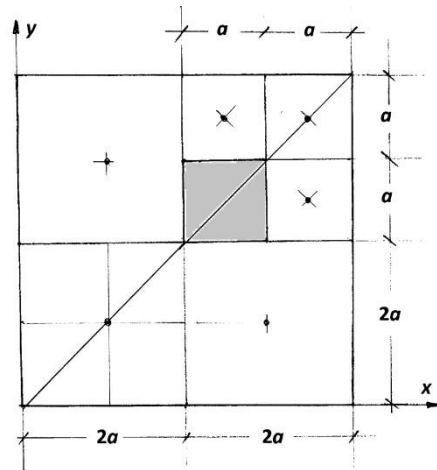
Összesen: 20 pont

3. /formális/ megoldás (6 részre darabolással, a függvény-táblázat képleteinek felhasználásával)

Használjuk fel a –tömegközéppont koordinátáira vonatkozó– a függvénytáblázatban található összefüggéseket, ahol x_{TKP} és y_{TKP} a hiányos négyzet keresett tömegközéppontjának két koordinátája!

$$x_{TKP} = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^6 m_i} = \frac{\sum_{i=1}^6 A_i \cdot x_i}{6} \quad \text{és}$$

$$y_{TKP} = \frac{\sum_{i=1}^6 m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^6 m_i} = \frac{\sum_{i=1}^6 A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^6 A_i}$$



1 pont

1 pont

A képletben A_i az m_i tömegű rész alapterülete, és $m_i \sim A_i$, mivel a lemez sűrűsége állandó, és a vastagsága is ugyanakkora. 2 pont

Célszerű az eredeti $4a$ oldalhosszúságú négyzetet az oldalfelező merőlegesei mentén 4 darabra bontani, majd a négyzet alakú „lyukat” tartalmazó negyed-négyzetet annak oldalfelező merőlegesei mentés újra negyedelni. Ugyanis mind a 6 darabnak ismerjük a tömegét is, és a tömegközéppontjaik koordinátáit is. 2 pont

Helyezzük el a síklemezt az x - y koordinátarendszerben úgy, hogy a lemez bal alsó csúcsa az origóban legyen! (Így elkerülhetünk negatív előjelű koordinátákat.) 1 pont

Behelyettesítés után:

$$x_{TKP} = \frac{4a^2 \cdot a + 4a^2 \cdot 3a + 4a^2 \cdot a + a^2 \cdot 2,5a + a^2 \cdot 3,5a + a^2 \cdot 3,5a}{16a^2 - a^2} = \frac{29,5a^3}{15a^2} = \frac{259,5a}{15} = \frac{59}{30} a \quad 3 \text{ pont}$$

Tekintettel arra, hogy az y tengely menti ordinátákra az abszcisszákra felírt egyenletekkel teljesen azonos adatok írhatók fel (a koordinátarendszer speciális megválasztása miatt): 4 pont

$$y_{TKP} = \frac{59}{30} \cdot a$$

A fentiek a „csonkolt” síkidom tömegközéppontjának koordinátái.

Hogy a kérdésre válaszoljunk, meg kell határozni e pontnak a $4a$ oldalú négyzet középpontjának ettől a ponttól való x távolságát, mint 2 pont távolságát.

Mivel a $4a$ oldalú négyzet tömegközéppontjának koordinátái: $(2a; 2a)$,

$$x^2 = \left[\left(2a - \frac{59}{30} \cdot a\right) \right]^2 + \left[\left(2a - \frac{59}{30} \cdot a\right) \right]^2 = 2 \cdot \left[\left(2a - \frac{59}{30} \cdot a\right) \right]^2 \quad 3 \text{ pont}$$

A műveletek elvégzése után $x^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{900} = \frac{a^2}{450}$ 2 pont

Így $x = \frac{a}{\sqrt{450}} = \frac{a}{15\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{30} \approx 0,047 \cdot a$ 1 pont

Tehát a hiányos négyzet tömegközéppontja $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{30}$ távolságra tolódik el a teljes négyzet középpontjától.

Összesen: 20 pont