# 32. Nagy László Fizikaverseny
## Szalézi Szent Ferenc Gimnázium, Kazincbarcika
## 2017. február 23 – 24.

## J a v í t ó k u l c s
## 11. osztály

# 1. feladat

Először érdemes a maximális hajítási távolságot kiszámítani abban az esetben, amikor a kilövő szerkezet áll, hogy tudjuk $D$ értékét.

Mint ismeretes, ebben az esetben a maximális hajítási távolságot akkor érjük el, ha a kilövés szöge 45°-os. Ezt az értéket behelyettesítve a függvénytáblázatból ismert, hajítási távolságra vonatkozó képletbe: 2 pont

$D = \frac{v_0^2}{g} \cdot sin2\alpha = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot 45^o) = \frac{v_0^2}{g}$ (ahol $g$ a nehézségi gyorsulást jelenti). 1+1 pont

(Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk, ha nem ezt a formális utat választjuk, hanem az emelkedési idő kiszámítása után annak kétszeresével (mint repülési idővel) megszorozzuk a $v_0$ kezdősebesség vízszintes összetevőjét.)

A mozgást két mozgás szuperpozíciójaként foghatjuk fel. Ezek az alábbiak:

- az 1. összetevő: egy ferdén felfelé hajítás, valamint 1 pont
- a 2. összetevő: egy vízszintes síkban végbemenő $v_0$ sebességű egyenletes mozgás. 1 pont

A számoláskor többféle utat is követhetünk:

- A fenti két mozgás vízszintes elmozdulás-vektorait összegezzük (1. módszer)
- A két összetevő mozgás kezdősebesség-vektorainak vektori összege adja meg a kérdezett ferde hajítás kezdősebességének nagyságát és irányát (2. módszer)

**a)**

*Megoldás az 1. módszerrel:*

A 60°-os hajítási szögű ferde hajítás $v_0$ kezdősebességének függőleges komponense $v_0 \cdot \sin 60^o = v_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. 1 pont

Ezzel számítva az emelkedés ideje: $t_{em} = \frac{v_0\sqrt{3}}{2g}$ ; a hajítás ideje pedig $t_{rep} = 2 \cdot t_{em} = \frac{v_0\sqrt{3}}{g}$. 2+1 pont

Ennyi idő alatt $v_0$ állandó sebességgel $S_2 = \frac{v_0^2\sqrt{3}}{g}$ elmozdulása lesz a kilövő szerkezetnek. 1 pont

Ehhez hozzáadódik a ferdén felfelé hajítás $v_0 \cdot \cos 60^o = \frac{v_0}{2}$ nagyságú vízszintes sebességkomponenséből adódó elmozdulás a teljes hajítási idő alatt: $S_1 = \frac{v_0}{2} \cdot \frac{v_0\sqrt{3}}{g} = \frac{v_0^2\sqrt{3}}{2g}$ 1 pont

A tényleges vízszintes elmozdulás 1 pont

$S = S_1 + S_2 = \frac{v_0^2\sqrt{3}}{2g} + \frac{v_0^2\sqrt{3}}{g} = \frac{3v_0^2\sqrt{3}}{2g} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot D$ 1 pont

*Megoldás a 2. módszerrel:* *vagy:*

Ha a kilövés pillanatában a kilövő szerkezet is $v_0$ sebességgel mozog a megadott irányban, az azt jelenti, hogy ez a sebesség és a 60°-os irányba mutató $v_0$ sebesség vektori összege jelenti ebben az esetben a ferdén felfelé hajítás kezdősebességének nagyságát és irányát, hiszen a kezdeti időpillanatban a kétféle mozgás szuperpozíciója teljesül. A hajítási szög pedig ennek az eredő sebességvektornak a vízszintessel bezárt szöge lesz. *1 pont* *1 pont*

Mivel mind a két mozgás sebessége $v_0$, és $60^o$-os szöget zárnak be egymással, az eredő sebességvektor hossza egy rombusz hosszabbik átlójának hosszával egyenlő nagyságú. *2 pont*

Mivel a rombusz átlói felezik annak szögeit, a mostani $V_0$ kezdősebesség iránya $30^o$-os szöget zár be a vízszintessel. *1 pont*

$V_0$ nagyságát is kiszámíthatjuk elemi geometriai ismeretekkel: ez egy $v_0$ oldalhosszúságú szabályos háromszög magasságvonala hosszának kétszerese lesz: $V_0 = 2\cdot\frac{v_0\cdot\sqrt{3}}{2} = v_0\cdot\sqrt{3}$. *1 pont* *2 pont*

Természetesen a fenti adat másféleképpen is kiszámítható.

Például: mivel tudjuk, hogy a kilövő szerkezet mozgása nem befolyásolhatja az eredő sebességvektor függőleges komponensét, a komponensekre bontás módszere alapján felírható, hogy

$V_{0y} = v_0\cdot\sin 60^o = v_0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = V_0\cdot\sin\alpha$

azaz $\mathbf{v_0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = V_0\cdot\sin\alpha}$ ; (1)

illetve: $V_{0x} = v_0\cdot\cos 60^o + v_0 = \frac{v_0}{2} + v_0$

azaz $\mathbf{\frac{3}{2}\cdot v_0 = V_0\cdot\cos\alpha}$ (2),

ahol $\alpha$ a $V_0$ eredő sebességvektor vízszintessel bezárt szöge.

Ha az (1) jelű egyenletet elosztjuk a (2) jelű egyenlettel, akkor azt kapjuk, hogy

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \mathrm{tg}\,\alpha$ , így $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{30^o}$ (ez az egyetlen fizikailag szóba jöhető megoldása az egyenletnek)

$V_0^2$ (esetleg $V_0$) nagyságát a Pitagorasz-tételből kaphatjuk:

$V_0^2 = V_{0x}^2 + V_{0y}^2 = \left(\frac{3}{2}\cdot v_0\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot v_0\right)^2 = \frac{9}{4}\cdot v_0^2 + \frac{3}{4}\cdot v_0^2 = \frac{12}{4}\cdot v_0^2 = 3\cdot v_0^2 \Rightarrow$ Így $V_0 = v_0\cdot\sqrt{3}$, amely eredmények megegyeznek az előbbiekkel.

**b)**

A kilövő szerkezet a golyó repülési ideje alatt $v_0$ sebességgel egyenletesen halad.

$t_{rep}$ időtartam alatt az elmozdulása: $s = v_0\cdot t_{rep} = v_0\cdot\frac{v_0\cdot\sqrt{3}}{g} = \frac{v_0^2}{g}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}\cdot D$ 1+1 pont

A golyó becsapódási helye és a kilövőnyílás egymástól való távolsága:

$x = S - s = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot D - \sqrt{3}\cdot D = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot D$ 2+1 pont

Vagy másképpen:

A kilőtt golyónak a kilövő szerkezethez viszonyított sebessége: $v_{rel} = \frac{3}{2}\cdot v_0 - v_0 = \frac{v_0}{2}$

A köztük lévő távolság a kérdezett időpontban: $x = v_{rel}\cdot t_{rep} = \frac{v_0}{2}\cdot\frac{v_0\cdot\sqrt{3}}{g} = \frac{v_0^2\cdot\sqrt{3}}{2\cdot g}$

*Tehát a keresett távolság* $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot D$ 1 pont

Megjegyzés:

A kezdeti $D = \frac{v_0^2}{g}$ egyenletből $v_0^2 = D\cdot g$ ; vagy $v_0 = \sqrt{D\cdot g}$

Ezért, ha a fenti megoldás bármely részleténél (formálisan) $v_0^2$ és/vagy $v_0$ helyett ezeket az értékeket írjuk be, azonnal $D$ függvényében kapjuk a megoldásokat.

**Összesen: 20 pont**